

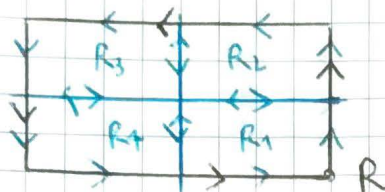
TEO (di Cauchy) $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe $\Rightarrow \oint_{\partial R} f(z) dz$ chiusa in D 04/04

Dim. Per il Cor 9 il teorema segue e mostriamo, $w = f(z) dz$

$$\int_{\partial R} w = 0 \quad \forall R \subset D \text{ rettangolo con } \bar{R} \subset D$$

Dimostriamo questo FATTO [detto Teorema di Goursat]

Sia R un folo rettangolo (intusamente $\subset D$) e sia $\alpha(R) = \int_{\partial R} w$



Dividiamo R in 4 rettangoli, $R_1, \dots, R_4$ e osserviamo che

$$\alpha(R) = \int_{\partial R} w = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i} w = \sum_{i=1}^4 \alpha(R_i)$$

e passiamo a moduli: $|\alpha(R)| \leq \sum_{i=1}^4 |\alpha(R_i)| \rightarrow \exists i: |\alpha(R_i)| \geq \frac{|\alpha(R)|}{4}$
 $\rightarrow$ poniamo $R^{(1)}$ questo rettangolo

Ripetiamo la costruzione ogni volta trovando un nuovo rett. Otteniamo una famiglia:

$$R = R^{(0)} \supsetneq R^{(1)} \supsetneq R^{(2)} \supsetneq \dots \supsetneq R^{(n)} \supsetneq \dots$$

Definiamo p_n = perimetro di $R^{(n)}$, A_n = area di $R^{(n)}$, d_n = diagonale di $R^{(n)}$
 Allora:

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{2} = \frac{p_0}{2^n}, \quad d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}, \quad A_n = \frac{A_{n-1}}{4} = \frac{A_0}{4^n}, \quad |\alpha(R_n)| \geq \frac{|\alpha(R_{n-1})|}{4} \geq \frac{|\alpha(R)|}{4^n}$$

Oss: per il criterio di Cauchy: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R^{(n)} \neq \emptyset$ quindi sia $z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R^{(n)} \subset D$

f olomorfa in z_0 quindi $\exists \varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua con $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ t.c.
 $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varphi(z)(z-z_0)$.

Calcoliamo $|\alpha(R^{(k)})| = \int_{\partial R^{(k)}} f(z) dz = \int_{\partial R^{(k)}} \varphi(z)(z-z_0) dz$ poiché $(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)) dz$ è poly $\rightarrow$ esatta

Poiché $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall z \in D_\delta(z_0)$, $|\varphi(z)| < \varepsilon$
 Quindi se k grande ($R^{(k)} \subset D_\delta(z_0)$) trova che $|\varphi(z)| < \varepsilon$ su $\partial R^{(k)}$

Fissiamo $\gamma_k: [0,1] \rightarrow D$ dal bordo di $R^{(k)} \rightarrow$

$$\frac{|\alpha(R)|}{4^k} \leq |\alpha(R^{(k)})| = \left| \int_{\partial R^{(k)}} \varphi(z)(z-z_0) dz \right| \leq \int_0^1 |\varphi(\gamma_k(t))| |\gamma_k(t) - z_0| |\gamma_k'(t)| dt \leq \varepsilon d_k p_k = \frac{\varepsilon d_0 p_0}{4^n}$$

$\leq \varepsilon$ $\leq \delta_k$ $\downarrow$ $\int_0^1 |\gamma_k'(t)| dt = p_k$

Ovvero $\forall \varepsilon > 0$, $|\alpha(R)| < \varepsilon$ dopo $\rightarrow |\alpha(R)| = 0$.

Def: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa allora una primitiva (a esiste) di f in D è $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ differenziabile t.c. $f(z) dz = dg$

Oss: se g è primitiva di $f \Rightarrow g$ olomorfa (dg pur a dz)

Cor: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa: local mente f ammette una primitiva

Cor2: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, D disco $\Rightarrow f$ ammette primitiva globale in D

Dim: f ha primitiva globale $(\Leftrightarrow) f(z)dz$ esatta $(\Leftrightarrow) \int_{\partial R} w = 0 \quad \forall R \subset D$

puché D è un disco.

Ma questo è quello che abbiamo dimostrato con Goursat.

Cor3 (da AM2) $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e C^1 con D semplicemente connesso $\Rightarrow f$ ammette una primitiva

Oss: anche qui C^1 non serve.

• $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e definisco:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

$\rightarrow g$ è continua su D e olomorfa su $D - \{z_0\}$: $g(z)dz$ chiusa?

TEO: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su D meno al più dei pt in una retta r continua $\Rightarrow f(z)dz$ è chiusa

Dim Vogliamo dimostrare che $\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \quad \forall R$ interamente contenuto in D

Comprendendo con una rotazione possiamo supporre $r \parallel$ asse x .
Sia R un rettangolo come prima

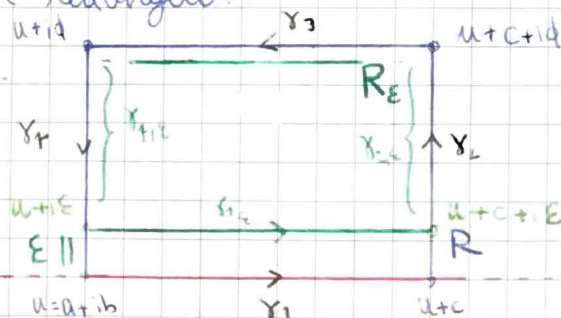
• $R \cap r = \emptyset$ ok poiché f è olomorfa su $D - r \xrightarrow{\text{Cauchy}} \checkmark$

• Supponiamo $R \cap r =$ lato del rettangolo.

Supponiamo $\int_{\partial R_\epsilon} f(z)dz = 0 \quad \forall \epsilon > 0$.

Mostriamo che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial R_\epsilon} f(z)dz = \int_{\partial R} f(z)dz$$



$$\text{Ora } \int_{\partial R_\epsilon} f(z)dz = \int_{\gamma_{1,\epsilon}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,\epsilon}} f(z)dz + \int_{\gamma_{3,\epsilon}} f(z)dz + \int_{\gamma_{4,\epsilon}} f(z)dz$$

$$\text{Dimostriamo che } \int_{\gamma_{i,\epsilon}} f(z)dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_i} f(z)dz \quad \forall i = 1, 2, 4$$

- Consideriamo $\gamma_{2,\epsilon}, \gamma_{4,\epsilon}$. Allora:

$$\int_{\gamma_{2,\epsilon}} f(z)dz = \int_{b+\epsilon}^{b+d} f(a+c+ti)dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_b^{b+d} f(a+c+ti)dt = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

funzione continua in ϵ
+ l'uso fondamentale calcolo integrale

e uguale $\gamma_{4,\epsilon}$

$$- \int_{\gamma_{1,\epsilon}} f(z)dz = \int_a^c f(t, b+\epsilon)dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^c f(t, b)dt = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

TEO (AMU) $F: (t_0, t_1) \times K \rightarrow \mathbb{R}$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ comp. $Q(t) = \int_K F(t, x) dx$
 Se F è UC $\Rightarrow Q$ continua

Sia $R \subset \mathbb{R}^n$ rettangolo più grande di R , $R' \subset D$:
 f continua in R' comp. $\Rightarrow f$ u.c. su R' e per il teorema

$f: [a, c] \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ UC $\Rightarrow \int_a^c f(t, b+\varepsilon) dt$ continua in ε
 ovvero $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^c f(t, b+\varepsilon) dt = \int_a^c f(t, b) dt$

$$\Rightarrow \int_{\partial R} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = 0$$

Cor: f continua $D \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa tranne che in un # finito di punti
 $\Rightarrow \int f(z) dz$ chiusa in D .

Dm: sempre la stessa storia dei R . ora tagliamo R in rettangolini
 in modo che i pt non olomorfi siano su uno stesso lato $\forall$ rett.
 $\rightarrow$ finisco per il teo sopra.

• $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in D \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ [INTEGRALE DI CAUCHY]
 (spoiler $\rightarrow$ 04/08) $\gamma_0(t) = z_0 + e^{it}$

Def: $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ curva chiusa, C^1 a tratti e sia $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$.
 Allora l'indice di γ rispetto a z_0 è

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

Prop $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

04/08

Dim1: Caso $\gamma \in C^1$ (non a tratti): allora

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} dt \quad \text{e se } h(s) = \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} dt$$

• h continua e derivabile con $h' = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}$ e $h(0)=0$: $h(1)$?

Sia $F(t) = e^{-h(t)} (\gamma(t) - z_0)$: $F'(t) = -h'(t) e^{-h(t)} (\gamma(t) - z_0) + \gamma'(t) e^{-h(t)} = 0$
 Quindi F è costante in $[0,1]$, ovvero

$$F(0) = e^0 (\gamma(0) - z_0) = e^{-h(1)} (\gamma(1) - z_0) = F(1) \rightarrow e^{-h(1)} = e^0 = 1$$

ovvero $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $h(1) = 2\pi k i \Rightarrow I(\gamma, z_0) = k$.

Dim2 (via equivalenza omotopica) $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ curve chiuse omotope e C^1 a tratti

Date w differenziabile chiusa in D : $\int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$

Prop: $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \Rightarrow \frac{dz}{z-z_0}$ è forma differenziale chiusa in D

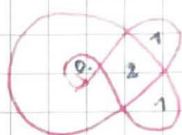
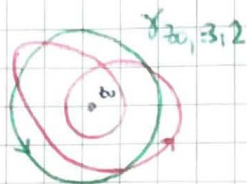
Sia $r > 0 \rightarrow \Pi_1(\mathbb{C} \setminus z_0, r)$ generata da $\gamma_{z_0, r, 1} = z_0 + r e^{it}$.
Scegliere in modo che γ intersechi $\gamma_{z_0, r, 1}$



$\gamma \sim \gamma_{z_0, r, 1}$ per qualche k

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_{z_0, r, 1}} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{2i\pi k r e^{2itk}}{r e^{2itk}} dt = 2\pi k$$

es:



Prop: $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma) \xrightarrow{z_0} \mathbb{Z}$ è una funzione continua
 $I(\gamma, z_0)$

Dim: Mostriamo $\lim_{w \rightarrow w_0} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w_0}$

Sia $c = \min_{[0,1]} |\gamma(t) - w_0| > 0$ voglio $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w_0} \right| \xrightarrow{w} 0$

$$\text{Ora: } \left| \int_{\gamma} \frac{w-w_0}{(z-w)(z-w_0)} dz \right| = \left| \int_0^1 \frac{(w-w_0)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-w)(\gamma(t)-w_0)} dt \right|$$

$$\text{se } |w-w_0| < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{1}{|\gamma(t)-w|} \leq \frac{1}{c/2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \xrightarrow{w \rightarrow w_0} 0$$

$L(\gamma) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Poiché $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ e $I(\gamma, \cdot)$ è continua

$\Rightarrow I(\gamma, \cdot)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$

Def: z_0 è esterno a γ se $I(\gamma, z_0) = 0$

$\text{Im}(\gamma)$ comp.
 $\rightarrow$ chiuso, l.c.
 $\checkmark \exists B_r(z_0) \cap \text{Im}(\gamma) = \emptyset$

es: Mostriamo che $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ ha un'unica componente connessa illimitata, e che ogni $z_0 \in U_0$ è esterno a γ

TEO [Formula integrale di Cauchy]

D disco, f olomorfa in D , γ curva chiusa C^1 a tratti in D , $z_0 \in D \setminus \text{Im} \gamma$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0)$$

Dim: Considero la funzione $g: D \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$

g è continua in D e olomorfa in $D \setminus z_0$

inoltre per $\odot$: $g(z) dz$ CHIUSA in D ma D disco chiuso quindi $\int_{\gamma} g(z) dz$ è esatta

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

$I(\gamma, z_0)$

In generale: formula dell'integrale di Cauchy

- D aperto

- γ curva contrattibile in D (o chiusa e C^1 a tratti)

$$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C} - \text{Im } \gamma: f(z_0) I(\gamma, z_0) = \left(\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt \right) \frac{1}{2\pi i}$$

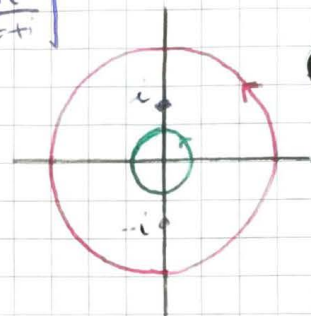
ex: $f(z) = e^z, z_0 = 0$ e $\gamma = \gamma_{0,1,r} = z_0 + re^{i2\pi t}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{0,1,r}} \frac{e^z}{z} dz = \frac{e^0}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_{0,1,r}} \frac{dz}{z} = 1 \quad \int_{\gamma_{0,1,r}} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i$$

$\int_{\gamma_{0,1/2}} \frac{dz}{z^2+1} = 0$ in fatti la funzione non e' olomorfa solo in $\pm i$ ma la curva non vede quei punti

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{0,2}} \frac{dz}{z^2+1} &= \int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right] dz = \frac{i}{2} \left[\int_{\gamma_{0,2}} \frac{dz}{z-i} - \int_{\gamma_{0,2}} \frac{dz}{z+i} \right] \\ &= \frac{i}{2} [I(\gamma, i) - I(\gamma, -i)] = 0 \end{aligned}$$

sotto
nello stesso
c.c. di $\mathbb{C} - \text{Im}(\gamma_{0,2})$



$\int_{\gamma_{2,1}} \frac{z^2+1}{z(z^4+1)} dz = 0$ non tocca le discontinuita' $\sum_{j=0}^{2k+1} z^j = 0$

$$\int_{\gamma_{0,1/2}} \frac{z^2+1}{z(z^4+1)} dz = \int_{\gamma_{0,1/2}} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) \cdot 2\pi i = 2\pi i$$

$f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$

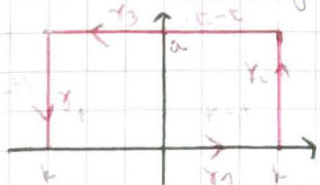
$\rightarrow$ uso CAUCHY

$\int_{\gamma_{1,r}} \frac{z^2+1}{z^2(z^4+1)} dz$ con $z \in (0,1)$ e $r \in (0,1)$

Sappiamo $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ mostriamo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(ax) dx = \sqrt{2\pi} e^{-a^2/2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(ax) dx = \lim_k \int_{-k}^k e^{-x^2/2} \cos(ax) dx \text{ e po' } \forall r \text{ chiusa } \int_{\gamma} e^{-x^2/2} dx = 0$$

Sia R_k rettangolo $0 = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \Rightarrow \int_{\gamma_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-k}^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt \rightarrow \sqrt{2\pi}$



$$\rightarrow \int_{\gamma_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_0^1 e^{-\frac{k^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{it}{2}} e^{it} dt \rightarrow 0$$

o ug γ_4

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi} \int_{\gamma_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -e^{-\frac{a^2}{2}} \int_{-k}^k e^{\frac{t^2}{2}} (\cos(at) + i \sin(at)) dt$$

SERIE DI POTENZE (Algebra delle serie formali) Lecture 1 04/10

$\sum a_n x^n$ serie formale $\cdot +$, prodotto pu valore $\rightarrow$ sp rett su K

$$K[[x]]$$

$$(\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n) = \sum c_n x^n$$

dove $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ (Cn def solo un # finite di termini)

$\Rightarrow K[[x]]$ è una K -algebra
con unità $1 = \sum a_n x^n$ $a_0 = 1, a_n = 0 \forall n > 0$

$$K[x] \hookrightarrow K[[x]] \text{ sottoalgebra}$$

Def Si dice ordine di S , il numero $w(S) := \begin{cases} \min \{n | a_n \neq 0\} & S \neq 0 \\ +\infty & S = 0 \end{cases}$

Def $\{S_i\}_{i \in I}$ si dice sommabile se $\forall k, w(S_i) \geq k$ def.
(per tutti franke al più un # finite)

$\Rightarrow \{S_i\}$ è sommabile, non no contraddizione

$$S = \sum S_i = \sum a_n x^n \text{ dove } a_n = \sum_{i \in I} a_{n,i}$$

ex: $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia sommabile.

Prop $K[[x]]$ è un dominio d'integrità

Dim: $ST = 0$ con $S = \sum a_p x^p, T = \sum b_q x^q$ e supponiamo $S, T \neq 0$

$$\rightarrow p = w(S), q = w(T) \in \mathbb{N} \text{ e } S(x)T(x) = \sum c_n x^n$$

dove $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$

Sicuramente $c_n = 0 \forall n \leq p+q$ e $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$
perché $a_p, b_q \neq 0$ e K campo
 $\rightarrow ST \neq 0$ assurdo

Abbiamo anche dimostrato che $w(ST) = w(S) + w(T)$

• Composizione di serie formali

$$\text{Siano } S(x) = \sum a_n x^n, T(x) = \sum b_n x^n \text{ con } \boxed{b_0 = 0}$$

Consideriamo $a_n (T(x))^n$: $b_0 = 0 \Rightarrow w(a_n (T(x))^n) \geq n$
quindi la famiglia degli $a_n (T(x))^n$ è sommabile.

$$\Rightarrow \text{definiamo } S \circ T = S(T(x)) = \sum_n a_n (T(x))^n$$

Valgono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} & (S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T \\ & (S_1 \circ S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \circ (S_2 \circ T) \\ & 1 \circ T = 1 \end{aligned} \right\} \varphi_T: K[[x]] \xrightarrow[S]{S \circ T} K[[x]]$$

$$\text{ex: } S \circ (T_1 + T_2) \neq S \circ T_1 + S \circ T_2$$

$$T_1 = 0, T_2 = x \rightarrow T_1 + T_2 = T_2$$

e $S \circ T_1 = a_0 \neq 0$ in generale

- $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sommabile $\rightarrow (\sum S_i) \circ T = \sum (S_i \circ T)$

- $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$ se $w(T) \geq 1, w(U) \geq 1$

Ind. su n : $T^n \circ U = (T \circ U)^n$
 Durch $S \circ T = \sum a_n T^n \rightarrow (S \circ T) \circ U = (\sum a_n T^n) \circ U$
 $= \sum a_n (T \circ U)^n = \sum a_n (T \circ U)^n = S \circ (T \circ U)$

- $K[[X]]^*$

$$(1-X)(1+X+X^2+\dots+X^n+\dots) = 1 \rightarrow 1-X \in K[[X]]^*$$

Prop: $S(X) \in K[[X]]^* \rightarrow w(S) = 0 \Leftrightarrow S(0) \neq 0$

Dim: - Se $ST = 1 \Rightarrow a_0 b_0 = 1 \rightarrow a_0 = S(0) \neq 0$
 - Sia S con $S(0) \neq 0$, allora $a_0 = S(0) \in K^*$ quindi

$$a_0^{-1} S(X) = 1 - U(X) \text{ con } w(U) \geq 1, \text{ ma allora}$$

$$a_0^{-1} S(X) = (1-X) \circ U \text{ e } (1-X) \text{ invertibile} \rightarrow a_0^{-1} S(X) \text{ inv. e quindi anche } S.$$

Oss: in particolare ogni polinomio $Q(X) \in K[X] \subset K[[X]]$ tale che $Q(0) \neq 0$ ha un inverso in $K[[X]]$

$$\Rightarrow ((X)^c)^{-1} K[X] = K[X]_{(X)} \subset K[[X]] \text{ ovvero } \frac{p}{q} \in K[[X]] \text{ se } q(0) \neq 0$$

* CONVERGENZA delle SERIE DI POTENZE [Cap 1.2] 04/17

Convergenza normale su $E \Rightarrow$ - convergenza assoluta $\forall x \in E$
 - convergenza uniforme

Vogliamo studiare la convergenza di $\sum a_n z^n = S(z)$ con $z \in \mathbb{C}$

- serie associate: $\sum_{n \in \mathbb{R}^+} |a_n| r^n$ e sappiamo $\sum_{n \in \mathbb{R}^+} |a_n| r^n < +\infty \forall r < \rho$ raggi di convergenza

Lemma di Abel $0 < r < r_0 \in \mathbb{R}$ e $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| r_0^n \leq M \forall n$ allora

$$\sum a_n z^n \text{ converge normalmente } \forall |z| \leq r$$

$$[|a_n z^n| \leq |a_n| |z|^n \leq |a_n| r^n \leq M (r/r_0)^n \rightarrow \sum \|a_n z^n\| \leq M \sum (r/r_0)^n < +\infty \text{ poich\'e } r < r_0]$$

Prop: a) $\forall r < \rho$ la serie $\sum a_n z^n$ converge normalmente $\forall |z| \leq r$ e converge assolutamente per $|z| < \rho$

b) la serie $\sum a_n z^n$ diverge per $|z| > \rho$

Dim: a) Se $r < \rho$ scelgo r_0 : $r < r_0 < \rho \Rightarrow \sum |a_n| (r_0)^n < +\infty$ quindi esiste $M > 0$ t.c. $|a_n| r_0^n \leq M \forall n$.

$\Rightarrow \sum a_n z^n$ converge normalmente per $|z| \leq r$ Abel

b) se $|z| > \rho \forall M \exists n : |a_n| |z|^n > M$ altrimenti (per Abel) esisterebbe $\rho < r' < |z|$ t.c. $\sum |a_n| (r')^n$ converge, assurdo.

Inoltre vale che $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$

* DIFFERENZIABILITÀ DELLE SERIE FORMALI CONVERGENTI

● $S(x) = \sum a_n x^n$ e $T(x) = \sum n a_n x^{n-1}$

① S e T hanno lo stesso raggio di convergenza ρ .

Sia $\alpha_n = |a_n|$ e siano ρ, ρ' raggi di convergenza di S e T.

$$r < \rho' \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \alpha_n r^n \leq r \left(\sum_{n \geq 0} n \alpha_n r^{n-1} \right) < +\infty \Rightarrow r \leq \rho$$

$$r < \rho, \text{ sia } r < r' < \rho \Rightarrow n \alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'} (\alpha_n r'^n) \cdot n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1}$$

poiché $r' < \rho$, $\sum \alpha_n r'^n < +\infty \rightarrow \exists M > 0$ $\alpha_n r'^n < M$
e quindi:

$$n \alpha_n r^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1} \text{ e } \sum n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1} < +\infty$$

quindi per confronto anche $\sum n \alpha_n r^{n-1} < +\infty \rightarrow r \leq \rho'$

● $\Rightarrow \rho = \rho'$

② $T(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} \quad \forall |z| < \rho \quad (T(x) = S'(x))$

Sia $|z| < \rho$ e $|z| < r < \rho$ sia $r - |z| \geq |h| \neq 0 \Rightarrow |z+h| < r$

$$\Rightarrow \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) = \sum_{n \geq 0} u_n(z, h)$$

$$\text{dove } u_n(z, h) = \frac{\alpha_n [(z+h)^n - z^n]}{h} - n \alpha_n z^{n-1} = \alpha_n ((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1})$$

con $|z|, |z+h| \leq r < \rho$ allora:

$$|u_n(z, h)| \leq \alpha_n \cdot 2n r^{n-1} \text{ e } r < \rho \rightarrow \sum \alpha_n n r^{n-1} < +\infty \quad (\text{p. maggiorata da } T)$$

$$\Rightarrow \text{Scelto } \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ t.c. } \sum_{n \geq n_0} 2n \alpha_n r^{n-1} < \varepsilon/2$$

Inoltre $\sum_{n \leq n_0} \dots$ è un polinomio in h che si annulla in $h=0$

$$\rightarrow \exists \eta \text{ t.c. } \left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| < \varepsilon/2 \text{ per } |h| < \eta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) \right| \leq \left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| + \sum_{n \geq n_0} 2n \alpha_n r^{n-1} \leq \varepsilon$$

(Ovvero esiste h t.c.)
 $\forall \varepsilon > 0$

oss: si può dimostrare che la convergenza è uniforme in z per $|z| < \rho$

→ una serie di potenze convergente a due variabili (in senso omerfor)

* SERIE CONVERGENTI E FUNZIONI ANALITICHE [Cap 14.11] 04/18

Prop: Sia $S(x) = \sum a_n x^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$

$\Rightarrow$ la funzione $S(z) = \sum a_n z^n$ è analitica sul disco $|z| < \rho$

Inoltre la serie converge a $S(z)$ in z_0 con $|z_0| < \rho$ e

$$(*) \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \text{ per } |z - z_0| < \rho - |z_0|$$

[dove $(*)$ ha raggio di convergenza $\geq \rho - |z_0|$]

[Def $f(x)$ definita in D aperto si dice analitica in D se in ogni punto $x_0 \in D$

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \text{ per } |x - x_0| < \hat{\rho}(x_0)$$

$\rightarrow$ Ovviamente: - Ogni funzione analitica è C^∞ in D (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)
- e tutte le sue derivate sono C^∞ analitiche

$\Rightarrow$ le funzioni analitiche sono un anello (e uno K -algebra)]

Dim: Sia $r_0 = |z_0|$ e $d_n = |a_n|$: vale

$$|S^{(p)}(z_0)| = \left| \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q \right| \leq \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| r_0^q$$

allora per $r_0 < r < \rho$ vale:

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(z_0)| (r - r_0)^p \leq \sum_{p \geq 0} \frac{(p+q)!}{p! q!} |a_{p+q}| r_0^q (r - r_0)^p = \sum_n d_n r^n < +\infty$$

associata a

$\Rightarrow$ quindi $\forall r < \rho$ in $r - r_0$ la serie $(*)$ converge $\rightarrow$ ha raggio di conv $\geq \rho - r_0$

Quindi se $|x - x_0| < \rho - r_0$ la serie $(*)$ è assolutamente convergente:

$$\sum_{p, q} |a_{p+q}| \frac{(p+q)!}{p! q!} z_0^q (z - z_0)^p = \sum_n |a_n| x^n = S(x)$$

$$= \sum_{p, q} |a_{p+q}| \frac{(p+q)!}{p! q!} z_0^q (z - z_0)^p = \sum_p \frac{(z - z_0)^p}{p!} S^{(p)}(z_0)$$

$\uparrow$
somma su $q \geq 0$
 $\uparrow$
somma su $p \geq 0$

Abbiamo dimostrato che ogni serie converge e approssima in ogni punto con la sua serie di Taylor

• Prolungamento analitico

TEO: f analitica in D aperto connesso e ha $x_0 \in D$. I seguenti fatti sono equivalenti:

a) $f(x_0) = 0$ e $f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \forall i \geq 1$

b) f è costantemente 0 su un intorno di x_0

c) $f \equiv 0$ in D

Dim è ovvio che (c) $\Rightarrow$ (a).

- (a) $\Rightarrow$ (b) f analitica e quindi $\exists V > x_0$ t.c. $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = 0 \quad \forall x \in V$

- (b) $\Rightarrow$ (c) Sia $D' = \{z \in D \mid f \equiv 0 \text{ su un intorno di } z\} \subset D$ non vuoto

• D' aperto per definizione

• Sia $\bar{z} \in D' \Rightarrow$ esiste $x_n \rightarrow \bar{z}$ e $\exists x_n \in D'$

f analitica $\Rightarrow f^{(n)}$ continuo $\forall n \Rightarrow f^{(n)}(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x_n) = 0$
quindi per (a) $\Rightarrow$ (b) $\rightarrow \bar{z} \in D'$ cioè D' chiuso

Ma $D' \subset D$ aperto e chiuso in un connesso $\Rightarrow D' = D$ ✓
(non vuoto)

Quindi: data $f(x)$ analitica in Ω intorno di x_0 t.c. $f(x_0) = 0$
ma f non è identicamente nulla in nessun intorno di x_0

$\Rightarrow$ vale $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ e $f(x_0) = 0 \rightarrow a_0 = 0 : k = \min \{n \mid a_n \neq 0\}$

$\rightarrow$ la somma $\sum_{n \geq k} a_n (x-x_0)^{n-k} = g(x)$ se $|x-x_0| < \epsilon$
dove $g(x_0) \neq 0$ e $g(x)$ analitica

$\rightarrow f(x) = (x-x_0)^k g(x)$ con $g(x_0) \neq 0$

Quindi per la continuità di g esiste $\epsilon > 0 : g(x) > 0$ per $|x-x_0| < \epsilon$
 $g(x) \neq 0$

$\rightarrow f(x) = (x-x_0)^k g(x) \neq 0 \quad \forall \quad 0 < |x-x_0| < \epsilon \rightarrow x_0$ è uno 0 ISOLATO per f

Cor 1: L'anello delle funzioni analitiche ^{su un connesso} è un dominio

Dim: $fg \equiv 0$ con f, g analitiche $\Rightarrow \exists$ intorno di $x_0 \in D$ in cui una delle due è $\equiv 0$
(l'anello delle serie è un dominio)
 $\rightarrow$ una delle due è nulla

Cor 2 (prolungamento analitico) f, g analitiche su D connesso coincidono su un intorno di $x \in D$, allora coincidono su D

Prop: f funzione analitica su D aperto connesso non identicamente nulla, il suo luogo di zeri è discreto in D
(ovvero tutti i suoi zeri sono isolati)

Dim: Sia z_0 uno zero di f : per il Cor 2, non esiste nessun intorno di z_0 in cui $f \equiv 0$.

$\Rightarrow$ per quanto detto sopra z_0 è uno zero isolato di f .

$\rightarrow$ In particolare f analitica su un compatto ha solo un numero finito di zeri.

TEO f olomorfa in $|z| < \rho \Rightarrow f$ è analitica sul disco $|z| < \rho$

Dim: Sia $r < \rho$. Consideriamo una serie di potenze che converge normalmente a $f(z)$ per $|z| \leq r$.

Sia $r < r_0 < \rho$. Sia γ il cerchio di $r=r_0$ e centro 0
 $\rightarrow I(\gamma, z) = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$

Per la formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

e osserviamo che possiamo espandere in γ

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t} \sum \left(\frac{z}{t}\right)^n \text{ purché } |z| < |t|$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_n z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad \text{dove la serie converge normalmente per } |z| < r_0 \text{ e } |t| = r_0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \right) z^n = \sum_n a_n z^n \quad \text{serie di potenze convergente} \rightarrow \text{ANALITICA}$$

Abbiamo dimostrato che:

- Ogni funzione olomorfa è analitica
- Ogni funzione analitica è olomorfa

$\rightarrow$ per le funzioni di una variabile complessa ANALITICA $\equiv$ OLOMORFA

Quindi per quanto visto sulle funzioni analitiche abbiamo dimostrato che

ogni funzione olomorfa è differenziabile infinite volte con derivate continue

e le derivate di una funzione olomorfa è olomorfe.

(+) Forma alternativa INTEGRALE DI CAUCHY

04/29

Teo: Γ bordo orientato di K con K comp, $K \subset D$ aperto di $\mathbb{C}$.
Sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa: allora

$$(1) \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (2) \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-a} dz = 2\pi i f(a)$$

Dim: (1) ~~Goursat~~ ~~green~~ ovvio

(2) Sia $S = B_r(a) \subset K$ t.c. $\bar{S} \subset K \rightarrow \frac{f(z)}{z-a}$ olomorfa in $D - \{a\}$
ma $K \setminus S$ comp: $\Gamma_{K \setminus S} = \Gamma_K * \partial S^{-1}$

$$\text{per (1)} \quad \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-a} dz = \int_{\partial S^+} \frac{f(t)}{t-a} dz = 0$$

$2\pi i f(a)$ per T. Cauchy

* SERIE TAYLOR // FOURIER

$$f(z) = \sum a_n z^n \text{ con } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \rightarrow \text{devo conoscere tutte le derivate.}$$

Sia D dominio di f e π t.c. $B_r(0) \subset D$: allora

$$f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{in\theta} \quad \forall \theta \quad \text{e } 2\pi\text{-periodica}$$

Oss: $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta} d\theta = \frac{e^{i(n-p)\theta}}{i(n-p)} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \forall n \neq p$

$$\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

quindi: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n a_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta} d\theta \right)$

$$= r^p a_p \rightarrow a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) d\theta$$

La formula scelta ci dà un upper bound sui coeff. $\Rightarrow$ sia $M(r) = \sup_{\theta} f(re^{i\theta})$

$\rightarrow$ vale $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \forall r \neq 0$

TEO [Liouville]

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa limitata $\Rightarrow$ costante.

Dim: Poiché f è limitata $\exists M$ t.c. $M(r) \leq M \quad \forall r$
ma quindi:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} \quad |a_n| \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{r^n} \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M}{r^n} = 0 \rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

ovvero: $f(z) \equiv a_0$

TEO [Fondamentale dell'algebra]

$P(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio non costante $\rightarrow P$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$

Dim: Supponiamo per assurdo $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
Allora $\frac{1}{P(z)}$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, inoltre:

$$|P(z)| = |z^n| \left| \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty \quad (a_0 \neq 0)$$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{P(z)} \right| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$ da cui: $\exists K$ comp. t.c. $\left| \frac{1}{P(z)} \right| < \varepsilon \quad z \notin K$
ed anche $M = \max_K \left| \frac{1}{P(z)} \right|$

ma quindi $\frac{1}{P(z)}$ è limitata su $\mathbb{C}$

$\xrightarrow{\text{Liouville}} \frac{1}{P(z)}$ (e quindi $P(z)$) è costante su $\mathbb{C} \rightarrow$ assurdo $\nless$

Prop: f olomorfa e aperta

C 05/02

Dim: essere aperti e prop. locale: $f(z_0) = 0 \Rightarrow f = (z - z_0)^m h(z)$
in modo che $h(z) \neq 0$ su quell' intorno.
 $\Rightarrow \exists k(z)$ t.c. $k^m = h$.
in un intorno di z_0

Ma allora $f(z) = ((z - z_0) k(z))^m$ che e' aperta per il
teo delle funzioni implicite
+ $z \mapsto z^m$ invertimento

• FUNZIONI MEROMORFE

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n (z - z_0)^n & \text{con } w(f) &:= n_0 \\ g(z) &= \sum b_m (z - z_0)^m & w(g) &:= m_0 \end{aligned}$$

Avendo $f(z) = (z - z_0)^{n_0} f_1(z)$ con $f_1, g_1(z_0) \neq 0$
 $g(z) = (z - z_0)^{m_0} g_1(z)$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n_0 - m_0} h(z) \quad \text{dove } h(z) = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \text{ su un intorno di } z_0.$$

1. $n_0 > m_0 \Rightarrow (z - z_0)^{n_0 - m_0} h$ analitica
su intorno di z_0
e coincide con f/g
analitica

2. $n_0 < m_0 \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{1}{(z - z_0)^{m_0 - n_0}} h(z)$: z_0 e' detto POLO di f/g
con molteplicita' $m_0 - n_0$

Ovviamente se $f(z)$ olomorfa e z_0 zero con multiplicita' k di f ,
allora $\frac{1}{f(z)}$ ha z_0 come polo di ordine k .

Def: f si dice meromorfa su D se e' definita e analitica su D'
dove $D' = D - \{ \text{insiemi discinti di pt. } P_i \}$
e in ogni P_i ha un polo di ordine finito

⚠ Una f meromorfa e' localmente rapporto di f olomorfa
ma non su tutto D

PROBLEMA DI PRINCIPALE

Def: f, g definite su $V, V \in \text{Int}(z_0)$ diciamo che
 $(f, V) \sim (g, V) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V, W \in \text{Int}(z_0)$
 t.c. $f|_W = g|_W$

$\rightarrow [f]$ è detto germe di f

es: Considero l'anello dei germi in $z_0 = A_{z_0}$ posso vederlo

$$A_{z_0} \xrightarrow{T_{z_0}} \mathbb{C}[[z - z_0]]$$

sviluppo
di Taylor di f

• T_{z_0} è iniettiva per il principio del prolungamento analitico

• T_{z_0} surgettiva: S serie $\rightarrow [S]$

Bah

Chiusura e Prolungamento

Figura 1

• PT ALL' ∞

Def: Una varietà è X topologico t.c. $\forall x \in X \exists U \in \text{Int}(x)$
 ed $\exists \phi: U \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto continua.

$\Rightarrow (U, \phi)$ è una carta e $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A} \leftarrow$ atlante
 t.c. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Es. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Guardiamo allora S^2 con la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$:

- compatto

- ha 2 carte naturali: la proiezione stereografica
 dai punti P e P' dove $P = (0, 0, 1)$
 $P' = (0, 0, -1)$

$S^2 - \{P\} \approx \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ e l'omeo associa $(x, y, u) \leftrightarrow z = \frac{x+iy}{1-u}$

$S^2 - \{P'\} \approx \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ e l'omeo associa $(x, y, u) \leftrightarrow z' = \frac{x-iy}{1+u}$

Oss: vale $zz' = \frac{x^2+y^2}{1-u^2} = 1 \quad \forall M \neq P, P'$

$\Rightarrow (S^2, \{(S^2 - P, (x, y, u) \mapsto z), (S^2 - P', (x, y, u) \mapsto z')\})$ SFERA di RIEMANN

Diciamo f olomorfo su $D \subset S^2$ se $\forall M \in D$ esiste un intorno di M
 per cui f è una funzione olomorfa come funzione di z
 e $\forall M \neq P', M \in D$ esiste un intorno di M per cui f è una funzione
 olomorfa come funzione di z' .

$\rightarrow$ Possiamo vedere $\hat{\mathbb{C}} \approx S^2$ dove posso scegliere $P = P'$
 come pt all' ∞

- $f(z)$ olomorfa all' ∞ se con il cambio $z \rightarrow \frac{1}{z'}$, $f(z')$ è olomorfa
- $f'(z')$ olomorfa all' ∞ se è olomorfa in un intorno di $z' = 0$.

Inverso del teo di Cauchy:

Teo [Morera]

Sia $f(z)$ continua su un aperto D : $f(z)dz$ chiusa $\Rightarrow f$ olomorfa

Dim: $f(z)dz$ chiusa $\Rightarrow$ localmente ammette una primitiva g
e g è olomorfa con $g' = f \Rightarrow f$ derivata di una funzione
olomorfa $\rightarrow$ olomorfa

Cor: $f(z)$ continua su D e olomorfa su $D - \Delta$ qualche pt sullo ztto Δ
 $\Rightarrow f$ olomorfa su D

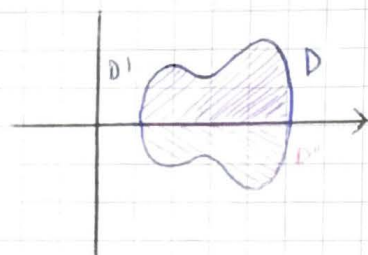
Dim: Δ // axe reale: per Cauchy generalizzato, $f(z)dz$ è chiusa
ma allora $f(z)$ olomorfa su D .

Oss: Ma quindi la generaliz di Cauchy era solo una generalizzazione
apparente

• PRINCIPIO DI SIMMETRIA DI SCHWARZ

D simmetrico rispetto all'axe reale, non vuoto, connesso e aperto
Sia $D' = D \cap \{y \geq 0\}$ e $D'' = D \cap \{y \leq 0\}$

Sia f continua su D' t.c. $f(D' \cap \mathbb{R}) \in \mathbb{R}$
e t.c. $f|_{D'} \rightarrow \mathbb{R}$ è olomorfa



$\Rightarrow$ exist $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ che estende f
ed è unico per il principio del
prolungamento analitico

Infatti: - sia $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ è continua su D''

$$- \forall z \notin D \cap \mathbb{R}: g \frac{(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right)}$$

$$\Rightarrow F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D' \\ g(z) & z \in D'' \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{continua su } D \text{ e olomorfa} \\ \text{su } D \setminus \Delta \xrightarrow{\text{cor}} \text{ olomorfa su } D \end{array}$$

• PRINCIPIO DELLA MEDIA

05/06

Sappiamo $f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{in\theta}$ dove $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

$$\Rightarrow f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$$

Ovvero $f(0)$ è la media di f su un cerchio di raggio r e centro 0

$$\text{In generale vale } \left[f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta \right] \text{ Proprietà della media}$$

Oss: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con la proprietà della media
 $\Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ hanno la proprietà della media.

• PRINCIPIO DEL MASSIMO (MODULO)

T: Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con Ω aperto ^{connesso (?)}. Supponiamo che

- f abbia la proprietà della ~~media~~ ^{media}
- $|f|$ abbia un pt di max locale in $a \in \Omega$ ($|f(z)| \leq |f(a)|$ in Int_a)

$\Rightarrow f$ è costante su un intorno di a .

Dim: - $f(a) = 0 \Rightarrow$ ovvio.

- $f(a) \neq 0$: a meno di costante supponiamo $f(a) \in \mathbb{R}^+$
 $(f \rightarrow f \cdot \overline{f(a)} \Rightarrow |f(a)| \rightarrow \|f(a)\| \in \mathbb{R}^+)$

$$(\text{PROD MEDIA}) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta \leq M(r)$$

dove $M(r) = \sup_{\theta} |f(a+re^{i\theta})|$ ma $|f(a+re^{i\theta})| \leq |f(a)|$ se r _{piccolo}

$\rightarrow f(a) = M(r)$ (questo mi dice che su ogni circ di centrato in a il sup è $f(a)$)

Consideriamo $g(z) = \operatorname{Re}(f(a) - f(z))$ $\uparrow$ soddisfa il teo medio
_{soddisfa teo media $\Rightarrow$}

Inoltre $f(a) \in \mathbb{R}^+$

$$|f(z)| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \leq f(a) \quad \& \quad |z-a|=r \text{ piccolo}$$

$$\Rightarrow g(z) = \operatorname{Re}(f(a) - x - iy) = f(a) - x \geq 0 \text{ se } |z-a| \text{ piccolo}$$

$$\text{E vale } \underline{g(z) = 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(f(z)) = f(a) \\ |f(z)| \leq f(a) \end{cases} \Leftrightarrow f(z) = f(a)$$

$$(\text{PROP MEDIA}) \quad 0 = g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{g(a+re^{i\theta})} d\theta \Rightarrow \underline{g(a+re^{i\theta}) = 0} \text{ se } r \text{ piccolo}$$

Cor: Ω aperto, limitato e connesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ armonico su Ω continuo su $\overline{\Omega}$

e sia $M = \sup_{\overline{\Omega}} |f|$. Allora

① $f(z) \leq M \quad \forall z \in \Omega$

② Se esiste $a \in \Omega$ t.c. $|f(a)| = M \Rightarrow f$ costante

Dim: Sio $M' = \sup_{\Omega} |f(z)|$ e $\bar{\Omega}$ compatto $\rightarrow \exists a: f(a) = M'$

- $a \in \Omega \rightarrow$
 - f costante in un intorno di a
 - $f^{-1}(M')$ è un chiuso
 - Ω connesso

$\Rightarrow f$ costante su Ω ma è continua su $\bar{\Omega} \rightarrow f \equiv f(a)$ su $\bar{\Omega}$

- $a \in \partial \Omega$ $M = M' \rightarrow$ ① ovvio e ② pure perché $f(a) = M \forall a \in \bar{\Omega}$

$\rightarrow f$ olomorfo su un aperto connesso e limitato, $M = \sup_{\partial \Omega} |f|$ e continua sullo chiusura

$\Rightarrow$ - f limitata su $\bar{\Omega}$
 - se $\exists a \in \partial \Omega: f(a) = M \rightarrow f \equiv M$ su $\bar{\Omega}$

• SERIE DI LAURENT $L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{con raggi di conv. } \rho_1$$

$$S_2 = \sum_{n < 0} a_n z^{-n} \quad \text{con raggi di conv. } \rho_2$$

$\Rightarrow$ Possiamo associare due f olomorfe:

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{se } |z| < \rho_1$$

$$g_2(w) = \sum_{n \geq 0} a_{-n} w^n \quad \text{se } |w| < \rho_2$$

$$\stackrel{w = \frac{1}{z}}{\rightarrow} f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n \quad \text{se } |z| > \frac{1}{\rho_2} = \rho_2$$

Facciamo vedere che f_2 è OLOMORFA in $\mathbb{C}$:

$$f_2(z) = g_2\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{e} \quad f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g_2'\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \sum_{n \geq 0} n a_{-n} \left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$\rightarrow f_2'(z) = \sum_{n < 0} n a_n z^{n-1}$$

[Se $\rho_2 < \rho_1$: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ olomorfa su $\rho_2 < |z| < \rho_1$]

SERIE DI LAURENT

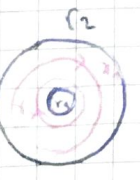
data f con serie di Laurent

Come prima, $\forall z = r e^{i\theta}$: $f(r e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} r^n$

$$\text{e troviamo } r^n a_n = \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) \frac{1}{2\pi}$$

TEO: Ogni funzione olomorfa sull'anello $\rho_1 < |z| < \rho_2$ ha l'espansione di Laurent sull'anello.

Dim: Siano $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$: dimostriamo che esiste una serie di Laurent che converge normalmente su $r_1 < |z| < r_2$ e che $e = f(z)$.



$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

$$\text{e si trova } a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad n \geq 0 \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad n < 0$$

Prop: $f(z)$ olomorfa su $p_1 < |z| < p_2 \Rightarrow \exists \begin{cases} f_1(z) \text{ su } |z| < p_2 \\ f_2(z) \text{ su } |z| > p_1 \end{cases}$

talche $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Questa decomposizione e' unica se chiediamo che
 $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$

Dim: $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ e sia $f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n$
 soddisfino.

- Supponiamo per assurdo $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$
 decomposizione di serie

$$\Rightarrow f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z) = h(z)$$

$$\rightarrow \begin{cases} h(z) = f_1 - g_1 \text{ su } |z| < p_2 \\ h(z) = g_2 - f_2 \text{ su } |z| > p_1 \end{cases} \text{ e } \lim_{|z| \rightarrow +\infty} h(z) = 0$$

$\xrightarrow{\text{LIOUVILLE}}$ $h(z) \equiv 0$ ma allora $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$
 + h olomorfa su $\mathbb{C}$

Come al solito $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| : |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ 05/08
 nella serie di Laurent.

• f olomorfa su $0 < |z| < p$
 vogliamo sapere se puo' essere estesa in 0

Prop: $f(z)$ olomorfa su $0 < |z| < p$ si estende per continuita' in 0



f limitato su un intorno di 0

Dim: ($\Uparrow$) $0 < |z| < p$ f si scrive come $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ ed $\exists M : |a_n| \leq \frac{M}{r^n}$

$$\text{Per } n < 0 \rightarrow |a_n| \leq M r^{-n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad n < 0 \quad \forall r < p.$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ ed e' definita in } 0.$$

Def: f definita su $0 < |z| < p$: 0 e' detta "singolarita' isolata" se f non e' prolungabile in 0.

($\Rightarrow$) i coef della serie di Laurent a_n con $n < 0$ NON sono tutti 0

Coro 1: $\exists$ un # finito di $a_{-n} \neq 0 \Rightarrow \exists n \cdot z^n f(z)$ si prolunga in 0
 $\Rightarrow f = \frac{g(z)}{z^n}$ e meromorfa in 0
 (in giti)

$\rightarrow$ diciamo che 0 e' un POLO

Coro 2: $\exists \infty a_{-n} \neq 0 \rightarrow f(z)$ non e' meromorfa in nessun int(0) $\rightarrow$ 0 e' una SINGOLARITA' ESSENZIALE

TEO [Weierstrass]

Se 0 è una singolarità essenziale isolata di f^{olomorfa} su $0 < |z| < \rho$
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : f(\{0 < |z| < \varepsilon\})$ denso in $\mathbb{C}$

Dim: Supponiamo per assurdo che $\exists B_r(0) \not\subset f(\{0 < |z| < \varepsilon\})$
 $\Rightarrow \forall z \in \{0 < |z| < \varepsilon\} \quad |f(z) - a| \geq r \Rightarrow g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ olomorfa limitata su $0 < |z| < \varepsilon$
 $\rightarrow$ possiamo estendere g in 0 e $\frac{1}{g(z)}$ olomorfa
 $\Rightarrow f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ olomorfa su $|z| < \varepsilon$, assurdo per essenzialità di 0

TEO [Picard]

Se 0 è una singolarità essenziale isolata di f olomorfa su $0 < |z| < \rho$
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : f(\{0 < |z| < \varepsilon\}) = \mathbb{C}$ o $\mathbb{C} - \{p\}$

(no dim)

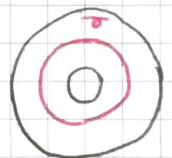
Quindi: f definito su $0 < |z| < \varepsilon$, ha 3 casi:

- ① f olomorfa in $0 \Leftrightarrow$ limitata $\Leftrightarrow$ nella serie di Laurent
 $a_n = 0 \quad \forall n < 0$
- ② $f(z) = \underbrace{f_1(z)}_{\text{parte olomorfa}} + \underbrace{f_2(z)}_{\text{parte polare}}$ dove $f_2(z) \neq 0$ olomorfa in 0 per qualche N
- ③ f ha una singolarità essenziale in 0

*TEO DEI RESIDUI

f olomorfa sull'anello $\{p_2 < |z| < p_1\} = A$

Prop: γ curva chiusa in $A \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = I(\gamma, 0) a_{-1}$



Dim: $f(z) = a_{-1}z^{-1} + g(z)$ e $g(z) = \sum_{n \neq -1} a_n z^n$ ha come primitiva
 $\int_{\gamma} g(z) dz = 0 \leftarrow$ quindi è olomorfa $\left\{ \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \right.$
della serie di Laurent di f e centro 0

$$\Rightarrow \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) \frac{1}{2\pi i} = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = a_{-1} I(\gamma, 0)$$

SE f ha una singolarità isolata in $0 \rightarrow \gamma$ giro intorno a 0

Se $\gamma \cong S^1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \boxed{a_{-1}}$ residuo di f in 0

- RESIDUO ALL'INFINITO: f olomorfa su $|z| > r \rightarrow z = \frac{1}{z}$: $f(z) dz = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$
se esponiamo con la serie di Laurent di f
 $-a_{-1}$ risultato che nel caso RESIDUO E' $-a_{-1}$

TEOREMA [dei residui]

D'aperta sulla sfera di Riemann S_2 e su f olomorfa su D
 e supponiamo che i pt su cui f non e definito siano singolarita per f .
 meno al piu qualche pt isolato

Su $\Gamma = \partial^+ A$ con $A \subset D$ comp e supponiamo che Γ non passi
 per nessuna singolarita di f
 ne per il pt all'infinito

$\Rightarrow$ • A contiene un # finito di singolarita
 $z_1, \dots, z_l$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_k \text{Res}(f, z_k) \right)$$

Dim: ① $\infty \notin A$: Allora A e un compatto di $\mathbb{C}$ (forse via proiezione)
 e su $\forall z_k$, S_k una circonferenza di centro $z_k + i$.
 - $S_k \subset A$
 - I dischi sono tutti disgiunti
 di bordo S_k

Su allora $A' = A - \bigcup \text{dischi } S_k$
 $\Rightarrow \partial^+ A' = \Gamma \cup S_k^{-1}$

f olomorfa su un intorno di $A' \rightarrow$ [T. Cauchy]: $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{S_k} f(z) dz$
 me:

$$\int_{S_k} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_k)$$

② $\infty \in A$: $|z| \geq r$ che non interseca Γ

(e contenuto in A) $\rightarrow$ e intorno di ∞

$\Rightarrow A'' = A - \{|z| > r\}$: $\partial A'' = \Gamma \cup \{|z| = r\}^{-1}$

comp su S_2
 caso ①

$$\int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{|z|=r} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

$$\rightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz = \left(\sum_k \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) \right) 2\pi i$$

Se $D = S^2 = \rightarrow \partial^- = \emptyset$ ma quindi $\sum \text{Res}(f, z_k) = 0$
 Ma in particolare questo m dice che $\text{Res}(f, \infty) = 0$

ex: • f ha un polo singolo $\neq 0$ $f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$, olomorfa su
 un intorno di z_0
 e ho $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$

Calcoliamo il residuo:

• Residuo della derivata logaritmica ($\ln$): $f(z) = z^n g(z)$
 $f'(z) = n z^{n-1} g(z) + z^n g'(z)$
 $\Rightarrow \frac{f'}{f}(z) = \frac{n}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ ha 0 come
 POLO SEMPLICE con residuo n

* NUMERO DI ZERI DI UNA FUNZIONE

$f(z)$ meromorfo in D aperto e suo Γ il bordo orientato di un comp. $K \subset D$.
non costante

Se f non ha poli su Γ e non è mai $= a$ in Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz = \sum_k \underbrace{\text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)-a}, z_k \right)}_{\substack{- z_k \text{ sol di } f(z_k)=a \\ - m \leq \text{Re}(\dots, z_k) = \text{mult di } (z-z_k) \text{ in } f}}$$

→ Se $a=0$: conta il # di zeri di f

$$\Rightarrow \text{Il \# di zeri di } f \text{ è } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = I(f \circ \gamma, 0)$$

[Proprietà dell'indice:

$$1 \quad I(\gamma, 0) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} : \text{data } f(t) \text{ t.c. } e^{f(t)} = \gamma(t) \Rightarrow I(\gamma, 0) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i}$$

$$2 \quad \gamma = \gamma_1(t) \gamma_2(t) \text{ e } \begin{matrix} f_1(t) \leftrightarrow \gamma_1(t) = e^{\frac{f_1(t)}{2\pi i}} \\ f_2(t) \leftrightarrow \gamma_2(t) = e^{\frac{f_2(t)}{2\pi i}} \end{matrix} \rightarrow \gamma = e^{f_1 + f_2}$$

$$I(\gamma, 0) = \frac{f_1(1) + f_1(0) - f_2(0) - f_2(1)}{2\pi i} = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$$

$$3 \quad \gamma, \gamma_1 \text{ t.c. } \gamma(t) \neq 0 \forall t \text{ e } |\gamma_1(t)| < |\gamma(t)| \Rightarrow I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$$

In fatti $\gamma_1 + \gamma = \gamma(t) \left(1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)} \right)$
 è un cammino contenuto in $B_1^0(z)$
 $\rightarrow I(\dots, 0) = 0$

TEO [Rouché]

$f(z), g(z)$ funzioni omeromorfe in D aperto e $\Gamma = \partial^+ K$ con $K \subset D$ comp.

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial K \Rightarrow \# \text{ zeri di } (f+g)|_K = \# \text{ zeri di } f|_K$$

Dim: # zeri di $f+g = \frac{1}{2\pi i} \int_{(f+g) \circ \gamma} \frac{dz}{z} = I(f \circ \gamma + g \circ \gamma, 0) \stackrel{(*)}{=} I(f \circ \gamma, 0)$

dove $(*)$ è vero perché $\text{Im } \gamma \subset K \rightarrow |g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|$
 e per la P3 dell'indice $\rightarrow I(f \circ \gamma + g \circ \gamma, 0) = I(f \circ \gamma, 0)$

es: $F(z) = 2z^2 + 1 + \frac{e^z}{2}$ e no $f(z) = 2z^2 + 1, g(z) = \frac{e^z}{2} \quad K = \{ |z| < 2 \}$

$$\Rightarrow \text{su } K: |g(z)| = \frac{1}{2} |e^z| = \frac{1}{2} e^{\text{Re}(z)} \leq \frac{1}{2} e^{|z|} \leq \frac{e^2}{2}$$

$$|f(z)| = |2z^2 + 1| \geq ||2z^4 - 1|| \geq \frac{e^{|z|}}{2} \text{ se } |z| < 2$$

$$\Rightarrow \text{Il \# di zeri di } F = \# \text{ di zeri di } f = 2.$$

*CALCOLO degli INTEGRALI con il metodo dei residui

Lo scopo è calcolare alcuni integrali senza trovare una primitiva.
Non ci sono regole generali, quindi si studiano quelli con

T1 $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ dove $R(x, y)$ funzione razionale senza poli su $x^2 + y^2 = 1$

Cambio di variabile
 $z = e^{it} \Rightarrow idt = \frac{dz}{z}$ e la funzione diventa $R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)$

$\Rightarrow I = 2\pi i \sum \text{Res} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \right\}$

es $R(\sin t, \cos t) = \frac{1}{a + \sin t}$ con $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Allora

$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = 2\pi \sum \text{Res} \left\{ \frac{1}{z} \cdot \frac{2i}{2ia + z + z^{-1}} \right\} = 2\pi \sum \text{Res} \left\{ \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1} \right\}$

Om $z^2 + 2iaz - 1$ ha come zeri $z_{1,2} = -ia \pm \sqrt{-a^2 + 1} = -ia \pm i\sqrt{a^2 - 1}$
e l'unico di norma ≤ 1 è $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$

e $\text{Res} \left\{ \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1}, -ia + i\sqrt{a^2 - 1} \right\} = \frac{1}{z_0 + ia} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \rightarrow I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

T2 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ dove R funzione razionale senza poli reali.
Supponiamo inoltre che l'integrale converga
(basta: parte principale di R a $+\infty$ è del tipo x^{-n} con $n \geq 2$)
o $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x R(x) = 0$

Sia γ_r il bordo del semicerchio di raggio r nel semipiano $y > 0$
e γ_r il semicerchio sotto l'asse $y=0$

① $\int_{\gamma_r} R(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{\gamma_r} R(z) dz$

② $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx = I$

③ Lemma: $f(z)$ continuo nel settore $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$:
se $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{|z|=r} \int f(z) dz = 0$

Dim: $M(r) = \sup_{\theta \in (\theta_1, \theta_2)} f(re^{i\theta}) = \sup_{|z|=r} f(z) \rightarrow \left| \int f(z) dz \right| \leq M(r)(\theta_2 - \theta_1)r$

$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} R(z) dz = 0$

④ $I = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z > 0} \text{Res}(R(z))$

(es) $R(x) = \frac{1}{1+x^6}$: $R(z)$ ha 6 poli di cui 3 in $\{y > 0\}$
 $\rightarrow z_0 = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}$

$\text{Res} \left\{ \frac{1}{1+z^6}, z_0 \right\} = \frac{1}{6z_0^5} = -\frac{z_0}{6} \rightarrow I = \frac{-2\pi i}{6} (e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6})$
 $= -\frac{\pi i}{3} \left(i + 2\frac{1}{2}i \right) = \frac{2}{3}\pi$

T3 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$ con f olomorfa su un intorno di ogni pt su $y \geq 0$ meno un # finito di pt al fin.

(a) Le singolarità di f non sono sull'asse reale.

Prop: $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0 \Rightarrow \lim_r \int_{-r}^r f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}(f(z) e^{iz})$

Oss: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz$ è convergente $\Rightarrow \int f(x) e^{ix}$ è convergente

• se f monotona in $x > 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0 \rightarrow \int f(x) e^{ix}$ convergenti

$\rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}(f(z), e^{iz})$

Dim: [Osserviamo che in $\{y > 0\}$ $|e^{iz}| < 1$.] $\rightarrow$ se vogliamo e^{-z} consideriamo $y < 0$.
 Stesse notazioni di T2, dimostriamo che

$\int_{\gamma(r)} f(z) e^{iz} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ Per farlo dimostriamo

Lemma f continua in $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ con $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$
 $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|z|=r} f(z) e^{iz} dz = 0$

Dim: $\sup_{\theta} |f(re^{i\theta})| = M(r) \rightarrow \left| \int_{|z|=r} f(z) e^{iz} dz \right| \leq M(r) \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta$
 $= \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} r e^{-r \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} r e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} d\theta$
 $< 2 \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} = \pi \checkmark$

(es) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+ix}}{x^2+1} dx \right)$
 $\xrightarrow{f \text{ meromorfa}} \frac{1}{2} \text{Re} \left(2\pi i \sum_{y>0} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z^2+1} \right) \right)$

Ora $f(z) e^{iz}$ ha come unico polo con parte immaginaria positiva
 $z=i \rightarrow \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i \right) = \frac{e^{-1}}{2i} \rightarrow I = \pi$

(b) f ha singolarità sull'asse reale

Lemma se $z=0$ polo semplice di $g(z)$: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z) dz = \pi i \text{Res}(g, 0)$

Dim: $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$ con h olomorfa in 0 $\int_{\gamma(\varepsilon)} h \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

$\Rightarrow \int_{\gamma(\varepsilon)} g = \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{a}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a$

Usiamo il lemma su $g(z) = f(z)e^{iz}$

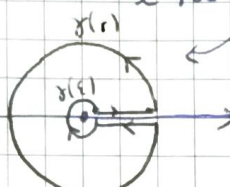
$$\begin{aligned} \text{es) } I &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{\pi i}{2} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

T4: $I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$ $\alpha \in (0,1)$ $R(x)$ funzione razionale senza poli sull'asse reale positivo

Necessariamente $R(x)$ deve convergere a $+\infty$, quindi
 I esiste se e solo $\frac{R(x)}{x^\alpha}$ x.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \equiv$ la parte polinomiale $\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 1$ perché R parte razionale

$\Rightarrow f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$ in $\mathbb{C} - \{x \geq 0, y=0\} = D$ dove $\arg(z) \in (0, 2\pi)$
 e no $\delta(r, \varepsilon)$ allora:



$$\int_{\partial(\varepsilon, r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\delta(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + (1 - e^{-2\pi i}) \int_{\varepsilon}^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$$

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} z^{1-\alpha} R(z) = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow +\infty} z^{1-\alpha} R(z) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \int_{\gamma(r)} &\xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{\delta(\varepsilon)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 - e^{-2\pi i}) I = 2\pi i \sum_D \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$$

es) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ $\alpha \in (0,1)$: $R(z) = (z+1)^{-1}$ che ha come polo $z_0 = -1$
 $\operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_0\right) = \frac{1}{e^{i\pi\alpha}}$
 $I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

T5: $I = \int_0^{+\infty} R(x) \log x dx$ R funzione razionale auto polo sull'asse $x \geq 0$

e t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = 0$ scegliamo $D = \mathbb{C} - \{x \geq 0, y=0\}$
 e $z \in D$ con $\arg z \in (0, 2\pi)$

e integriamo $R(x) \log(x)^2$ su $\partial(\varepsilon, r)$
 come sopra, passiamo a polo su $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(r)$ e
 se $z = \rho e^{2\pi i} \rightarrow \log(z) = \log(\rho) + 2\pi i$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} R(x) (\log x)^2 dx - \int_0^{+\infty} R(x) (\log x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_D \operatorname{Res}(R(z) \log^2 z)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} R(x) \log(x) dx = -\frac{1}{2} 2\pi i \left(\sum_D \operatorname{Res}(R(z) \log^2 z) - 2\pi i \int_0^{+\infty} R(x) dx \right)$$

es) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$ e $\frac{(\log z)^2}{(1+z)^3}$ ha come unico polo $z_0 = -1$
 il cui residuo è dato da $1 - i\pi$

$\rightarrow R(x)$ reale: $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2}$

• CALCOLO dei RESIDUI

Il coef a_{-1} della serie di Laurent di f in $z_0 =: \text{Res}_{z_0}(f)$

① $z_0 \neq +\infty$ è un polo semplice

$$f(z) = g(z) \cdot \frac{1}{z-z_0} \quad \text{con } g \text{ olomorfa in un intorno di } z_0, \text{ c. } g(z_0) \neq 0$$

$$\text{e ha } g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} b_n (z-z_0)^n = (z-z_0) f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n (z-z_0)^{n+1} \rightarrow \text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = b_0 = g(z_0)$$

$$\Rightarrow f \text{ è del tipo } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } z_0 \text{ polo semplice di } Q$$

$$P(z_0) \neq 0$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

② z_0 polo di ordine k : $\text{Res}(f, z_0) = \text{coef di } (z-z_0)^{k-1} \text{ nella SdT di } (z-z_0)^k f(z)$

es: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ e $z_0 = i$ $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$ $t = z-i$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{e^{i(t+i)}}{(t+i)(t+2i)^2} = e^{-1} (1+it+\dots) \cdot \frac{(1+it)}{-i} \cdot \frac{(1+it+\dots)}{-2i}$$

$$\rightarrow -e^{-1} \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{-1}{4e} (3) = -\frac{3}{4e}$$